Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti

11 aprilie 2007

CLASA A VII-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Într-un triunghi ABC, laturile a, b, c verifică relaţiile $a + b - c = 2$ şi $2ab - c^2 = 4$. Să se arate că triunghiul este echilateral.

Soluţie şi barem de corectare.
Deoarece $c = a + b - 2$, avem $2ab - (a + b - 2)^2 = 4$ .... 2 puncte
de unde $a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8 = 0$ .... 1 punct
şi $(a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 0$ .... 1 punct
Rezultă $a = b = 2$ şi apoi $c = 2$, de unde rezultă concluzia...... 3 puncte

Subiectul 2. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AC = 2AB$. Fie P şi Q mijloacele laturilor AB respectiv AC şi punctele M, N pe latura BC cu $CM = BN = x$. Să se determine x în funcţie de AB astfel încât $2 \cdot S[MNPQ] = S[ABC]$.

Soluţie şi barem de corectare. Notăm $c = AC$ şi avem $AC = 2c$. Fie m lungimea înălţimii din M în triunghiul MPB şi n lungimea înălţimii din N în triunghiul NCQ. Cum $BC = c\sqrt{5}$, din asemănări rezultă $\frac{m}{2c} = \frac{x}{c\sqrt{5}}$ şi $\frac{n}{c} = \frac{x}{c\sqrt{5}}$, deci $m = \frac{2x}{\sqrt{5}}$ şi $n = \frac{x}{\sqrt{5}}$. .... 2 puncte
Condiţia $2 \cdot S[MNPQ] = S[ABC]$ este echivalentă cu $S[APQ] + S[PBN] + S[CQN] = \frac{1}{2} \cdot S[ABC]$. .... 1 punct
Cum $CQ = c$ şi $PB = \frac{c}{2}$, egalitatea ariilor se scrie $\frac{c^2}{4} + \frac{m \cdot c}{4} + \frac{n \cdot c}{2} = \frac{c^2}{2}$ . . 2 puncte
adică $\frac{x \cdot c}{\sqrt{5}} = \frac{c^2}{4}$, de unde $x = \frac{x\sqrt{5}}{4}$ .... 2 puncte

Subiectul 3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB < AC$. Fie punctul D pe latura AC astfel încât $\angle ACB = \angle DBA$. Punctul E este proiecţia punctului D pe latura BC. Ştiind că $BD + DE = AC$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Soluţie şi barem de corectare. Din asemănarea $\Delta EDC \sim \Delta ADB$ rezultă $\dfrac{ED}{AD} = \dfrac{DC}{DB}$, adică $ED \cdot DB = AD \cdot DC$ .... 2 puncte
Conform ipotezei avem $ED + DB = AD + DC$, deci $ED = AD$ sau $ED = DC$ .... 3 puncte

Cazul $ED = DC$ conduce la contradicţie, iar cazul $ED = AD$ implică BD bisectoare, de unde obţinem unghiurile de $30°, 60°$ şi $90°$. . . . . . 2 puncte

Soluţie alternativă Fie F simetricul lui E faţă de dreapta AC. Din construcţie rezultă că $\angle BFC = 90°$. . . . . 2 puncte

Avem $ABCF$ inscriptibil şi, din ipoteză $BF = AC$, deci $ABCF$ este trapez isoscel . . . . 2 puncte

Din ipoteză şi din inscriptibilitate avem $\angle ACB = \angle FBA = \angle ACF$, iar din $AB = CF$ rezultă $\angle ACB = \angle FBC$. De aici $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle ABC$ şi unghiurile sunt $30°, 60°$ şi $90°$. . . . . 3 puncte

Subiectul 4. Fie m, n numere naturale cu $m > 1$ şi $2^{2m+1} - n^2 \geq 0$. Să se arate $2^{2m+1} - n^2 \geq 7$.

Soluţie şi barem de corectare. Dacă $n = 0$ avem $2^{2m+1} - n^2 = 2^{2m+1} \geq 8 > 7$ . . . . 1 punct

Dacă $n \geq 1$, fie $n = 2^l t$ cu $l, t \in \mathbb{N}$ şi t impar. Atunci $2^{2m+1} \geq n^2$, deci $2^{2m+1} \geq 2^{2l} t^2$, de unde $m \geq l$. . . . . 2 puncte

Dacă $m = l$ rezultă $t^2 \geq 2$ deci $t = 1$. Obţinem $n = 2^l$ de unde $2^{2m+1} - n^2 = 2^{2m+1} - 2^{2m} = 2^{2m} \geq 16 > 7$ . . . . 2 puncte

Dacă $m > l$, atunci $2^{2m+1} - n^2 = 2^{2l}(2^{2(m-l)+1} - t^2)$. Cum t este impar, avem $t^2 = \mathcal{M}8 + 1$, deci $2^{2(m-l)+1} - t^2 = \mathcal{M}8 + 7 \geq 7$ şi $2^{2l}(2^{2(m-l)+1} - t^2) = 2^{2l} = 2^{2l} \cdot 7 \geq 14 > 7$ . . . . 2 puncte

Soluţie alternativă

Vom demonstra că ecuaţiile $2^{2m+1} - n^2 = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ nu au soluţii. Reţinem că 8 divide 2^{2m+1}.

i) Pentru $i = 0$ nu avem soluţii căci 2^{2m+1} nu e pătrat perfect. . . . 1punct

ii) Dacă $i = 1, i = 3$ sau $i = 5$ atunci n este impar şi rezultă $n^2 = \mathcal{M}8 + 1$, deci $\mathcal{M}8 - 1 = i$, fals. . . . . 3 puncte

iii) Dacă $i = 2$ sau $i = 6$ atunci n este par şi 4 divide $2^{2m+1} - n^2$, adică 4 divide i, fals. . . . . 2 puncte

iv) Dacă $i = 4$ atunci n este par. Simplificând cu 4 ecuaţia devine $2^{2m-1} - n_1^2 = 1$. Cu un argument similar celui din cazul ii) se arată că nu avem soluţii. 1 punct